(Bu bölümde işlenecek olan konuların, matematik müfredat programındaki yeri altta gösterilmiştir.)

11. 1. Mantık

11. 1. 1. Önermeler ve Bileşik Önermeler

Terimler : Önerme, bileşik önerme, önermenin değili, ve, veya, ya da bağlaçları, De Morgan kuralları, koşullu önerme, koşullu önermenin karşıtı, koşullu önermenin tersi, koşullu önermenin karşıt tersi, iki yönlü koşullu önerme (veya gerek ve yeter şart), totoloji, çelişki.

Sembol ve Gösterimler : p , p ' (veya ~ p) , $\equiv$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\veebar$

11. 1. 1. 1. Önermeyi, önermenin doğruluk değerini, iki önermenin denkliğini ve önermenin değilini açıklar.

11. 1. 1. 2. Bileşik önermeyi açıklar, ve, veya, ya da bağlaçları ile kurulan bileşik önermelerin özelliklerini ve De Morgan kurallarını doğruluk tablosu kullanarak gösterir. (Ve / veya bağlaçlarının anlamları elektrik devrelerinden örneklerle pekiştirilir.)

11. 1. 1. 3. Kümelerdeki işlemler ile sembolik mantık kuralları arasında ilişki kurar. (Kümelerle yapılan işlemler ve sembolik mantıkta kullanılan sembol, gösterim ve bunlarla ifade edilen işlemler arasında aşağıdakilere benzer ilişkilendirmeler yapılır.)

1. ÜNİTE : MANTIK

Mantık doğru düşünme bilimidir. Doğru sonuca mantık kuralları ile ulaşılabilinir. Matematiğin amaçlarından biri doğru ve sistemli düşünebilmeyi kazandırmaktır.

Önerme – Bileşik Önermeler

Tanım : **(Önerme) Kesin olarak doğru ya da yanlış hüküm bildiren ifadelere " önerme " adı verilir. Önermeler çoğunlukla p , q , r , s v.b. harflerle gösterilir.**

*** **Bir önerme; doğru hüküm bildiriyorsa önermenin doğruluk değeri 1 , yanlış hüküm bildiriyorsa önermenin doğruluk değeri 0 olarak gösterilir.**

(Bir p önermesinin doğruluk değeri; önerme doğru ise p ≡ 1 , önerme yanlış ise p ≡ 0 olarak belirtilir.)

Örnek : **Aşağıdaki ifadelerden hangileri önerme, hangileri önerme değildir ? Tabloda işaretleyip (X işareti koyunuz), önerme olanların doğruluk değerini tabloya yazınız.**

İFADE	Önermedir	Önerme Değildir	Doğruluk Değeri
Türkiye'nin en büyük gölü Van Gölü'dür.			
Havalar soğumaya başladı.			
Rakamlar 9 tanedir.			
3 en küçük tek asal sayıdır.			
Tüm çift sayılar 4 ile tam bölünür.			
En sevilen ders matematik'tir.			

Soru : **Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerinin toplamını bulunuz.**

p : " Negatif bir tam sayının tüm kuvvetleri yine negatiftir. " ( )

q : " Tek basamaklı asal sayıların toplamı 17 'dir. " ( )

r : " Reel sayılar kümesi en kapsamlı sayı kümesidir. " ( )

s : " 5 elemanlı kümenin 2 elemanlı alt küme sayısı 25 'tir. " ( )

t : " Sayıların sıfıra bölümü tanımsızdır. " ( )

Tanım : (Doğruluk Tablosu)

Önermelerin bütün doğruluk değerlerinin gösterildiği tabloya " doğruluk tablosu " adı verilir.

1) Bir p önermesinin doğruluk değeri ya 0 (yanlış) ya da 1 (doğru) olabilir.

p
1
0

2) İki p ve q önermesinin doğruluk tablosunu oluşturalım.

	p	q
p ve q önermeleri doğrudur →	1	1
p doğru ama q yanlış önermedir →	1	0
p yanlış ama q doğru önermedir →	0	1
Her ikisi de yanlış önermedir →	0	0

3) **Herhangi üç p , q ve r önermesinin doğruluk tablosunu oluşturunuz.**

p	q	r

Not : **n tane farklı önermenin doğruluk değerleri için 2^n tane farklı durum vardır.**

Tanım : **Doğruluk değerleri aynı olan önermelere " denk önermeler " adı verilir.**

p ve q denk önermeler ise bu durum $p \equiv q$ olarak gösterilir.

Soru : **Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulup, denk önermeleri belirleyiniz.**

p : " 54627062814 sayısı 3 ile tam bölünür. "

q : " İki basamaklı en büyük negatif tam sayı – 99 'dur. "

r : " 0 en küçük sayma sayısıdır. "

s : " Eşkenar üçgende her bir iç köşe açısının ölçüsü 60° 'dir. "

Tanım : **Bir önermenin hükmünün değiştirilmesi sonucu ile elde edilen önermeye " önermenin olumsuzu (değili) " adı verilir. Bir p önermesinin değili p' ile gösterilir.**

p	p'	(p')'
1	0	1
0	1	0

Tablodan da görüleceği üzere (p')' ≡ p olur. Yani bir önermenin değilininin değili önermenin kendisine denk olur.

Soru : **Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerini bulup, değerleri tabloya yazınız.**

p : " $5 + 2 . (-3) - (-2)^3 = 7$ 'dir. "

q : " En büyük rakamları faklı üç basamaklı çift sayının 6 fazlası 870 'tir. "

p	p'	q	q'

Tanım : (Bileşik Önerme)

İki ya da daha fazla önermenin birbirine " ve " , " veya " , " ya da " , " ise " ve " ancak ve ancak " bağlaçları ile birbirine bağlanması ile elde edilen önermeye " bileşik önerme " adı verilir.

1) Ve Bağlacı (∧)

Yusuf karne hediyesi olarak babasından harçlık ve bisiklet istemiştir. (İsteğinin alınması olayın gerçekleştiğini gösterir.)

Babası Yusuf 'a :

(Olay)	(Sonuç)
• Harçlık vermiş ve bisikleti almıştır.	İsteği gerçekleşir.
• Harçlık vermiş ama bisikleti almamıştır.	İsteği gerçekleşmez.
• Harçlık vermemiş ama bisikleti almıştır.	İsteği gerçekleşmez.
• Her ikisini de almamıştır.	İsteği gerçekleşmez.

*** **Ve (∧) bağlacı ile oluşturulan bileşik önermenin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.**

p	q	p ∧ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Not : **Ve bağlacı ile bağlanmış önermelerin oluşturduğu bileşik önerme; iki önerme de doğru iken doğru, diğer durumlarda ise yanlıştır.**

Soru : **(1 ∧ 0)' ∧ 0' ≡ ?**

Soru : **p : “ $\sqrt{-25} = -5$ ’tir. ” ve q : “ En büyük negatif tam sayı -1 ’dir. ” önermeleri için $p \wedge q' \equiv$?**

2) Veya Bağlacı (∨)

Yusuf karne hediyesi olarak babasından harçlık veya bisiklet istemiştir. (İsteğinin alınması olayın gerçekleştiğini gösterir.)

Babası Yusuf 'a :

- **Harçlık vermiş ve bisikleti almıştır.** — **İsteği gerçekleşir.**
- **Harçlık vermiş ama bisikleti almamıştır.** — **İsteği gerçekleşir.**
- **Harçlık vermemiş ama bisikleti almıştır.** — **İsteği gerçekleşir.**
- **Her ikisini de almamıştır.** — **İsteği gerçekleşmez.**

p	q	p ∨ q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

*** **Veya (∨) bağlacı ile oluşturulan bileşik önermenin doğruluk tablosu yandaki gibidir. (Veya bağlacında hem tek önerme hem de iki önerme şartı sağlayabilir.)**

Not : **Veya bağlacı ile bağlanmış önermelerin oluşturduğu bileşik önerme; bileşenlerden biri bile doğru iken doğru, ikisi de yanlış iken yanlıştır.**

Soru : ***A)*** **(0 ∧ 1) ∨ (1 ∧ 0)' ≡ ?**

B) **[1' ∨ (0 ∨ 1)] ∧ 1 ≡ ?**

Soru : **[(1 ' ∨ 0) ' ∧ 1] ∨ (1 ∧ 0) ≡ ?**

Soru : **p : “ 6 < 7 – (– 3) ” ve q : “ Asal sayıların hepsi çift sayıdır. ” önermeleri için p ' ∨ q ≡ ?**

Soru : **p : “ Tek sayıların çift kuvvetleri yine tek sayıdır. ”,**
q : “ En küçük çift doğal sayı 2 ’dir. ” ve r : “ 3x – 5 = 13 ise x = 6 ’dır. ” önermeleri için (r ∧ p)' ∨ q ≡ ?

Örnek : **$p \wedge q' \equiv 1$ ve $r \vee q \equiv 1$ ise $(p \vee r)' \vee q \equiv ?$**

(Verilen bileşik önermeler kullanılarak önermelerin doğruluk değerleri bulunur.)

$p \wedge q' \equiv 1$	$r \vee q \equiv 1$	$(p \vee r)' \vee q \equiv ?$

Soru : **$(p \wedge q') \wedge (q \vee r) \equiv 1$ ise p , q ve r önermelerinin doğruluk değerlerini bulunuz.**

$$(p \wedge q') \wedge (q \vee r) \equiv 1$$

Soru : **$(r \vee q') \vee (p \wedge q)' \equiv 0$ ise p , q ve r önermelerinin doğruluk değerlerini bulup, $r' \wedge (p \vee q)$ bileşik önermesinin sonucunu elde ediniz.**

$$(r \vee q') \vee (p \wedge q)' \equiv 0$$

Örnek : **(p ∨ q) ∧ q ' bileşik önermesinin doğruluk tablosunu oluşturunuz.**

p	q	q '	p ∨ q	(p ∨ q) ∧ q '

Not : **Bileşik önermelerde tabloya yerleşim yaparken; önce tekli önermeler, sonra ikili bileşke önermeleri, en son da üçlü bileşke önermeleri yerleştirilir.**

Soru : **p ∨ (q ∧ p ') bileşik önermesinin doğruluk tablosunu oluşturunuz.**

Soru : **(p ∧ r) ∨ (q ∧ p) bileşik önermesinin doğruluk tablosunu oluşturunuz.**

Ve İle Veya Bağlacı İle Bağlanan Bileşik Önermelerin Özellikleri

***1) Tek Kuvvet Özelliği : Her p önermesi için, $p \vee p \equiv p$ ve $p \wedge p \equiv p$ denkliği sağlanır. Sağlama tablo ile de gösterilebilinir.

*2) Değişme Özelliği : Her p ve q önersi için, $p \vee q \equiv q \vee p$ ve $p \wedge q \equiv q \wedge p$ denkliği sağlanır. Sağlama tablo ile de gösterilebilinir.

*3) Dağılma Özelliği : Her p , q ve r önersi için,

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ ve

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ denkliği sağlanır. Sağlama tablo ile de gösterilebilinir.

*4) Birleşme Özelliği : Her p , q ve r önersi için,

$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ ve

$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ denkliği sağlanır. Sağlama tablo ile de gösterilebilinir.

***5) Özel Durumlar :

p ∨ 1 ≡ 1 **1 ∨ 1 ≡ 1** **0 ∨ 1 ≡ 1**	**p ∨ 0 ≡ p** **1 ∨ 0 ≡ 1** **0 ∨ 0 ≡ 0**	**p ∨ p' ≡ 1** **1 ∨ 0 ≡ 1** **0 ∨ 1 ≡ 1**
p ∧ 1 ≡ p **1 ∧ 1 ≡ 1** **0 ∧ 1 ≡ 0**	**p ∧ 0 ≡ 0** **1 ∧ 0 ≡ 0** **0 ∧ 0 ≡ 0**	**p ∧ p' ≡ 0** **1 ∧ 0 ≡ 0** **0 ∧ 1 ≡ 0**

Sonuçları deneme yanılma metodu ile de bulabilirsiniz.

Örnek : $p \wedge (q \wedge p') \equiv ?$

Soru : $(p \vee q) \vee q' \equiv ?$

Soru : $p \wedge (p' \vee q) \equiv ?$

Soru : $p \vee (p' \wedge q) \equiv ?$

***6) De Morgan Özelliği : Her p ve q önersi için, $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$ ve $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$ denkliği sağlanır. Birinin sağlamasını aşağıdaki tabloda gösterelim.

p	q	p '	q '	p ∨ q	(p ∨ q)'	p ' ∧ q '

Totoloji – Çelişki

Bir bileşik önerme; kendisini oluşturan önermelerin her değeri için doğru oluyorsa bu bileşik önermeye " totoloji " , daima yanlış oluyorsa bu bileşik önermeye de " çelişki " adı verilir.

Örneğin ; $p \vee p' \equiv 1$ bileşik önermesi totoloji, $p \wedge p' \equiv 0$ bileşik önermesi ise çelişkidir.

Soru : **p ∨ (p' ∨ q') ≡ ?**

Soru : **p ∧ (p ∨ q)' ≡ ?** **(De Morgan kuralı uygulanır.)**

Soru : $(p' \wedge q)' \vee q \equiv ?$

Soru : $[p \wedge (p \vee q')']' \equiv ?$

Örnek : **(p ' ∧ q)' ∧ (p ∨ q) ≡ ?**

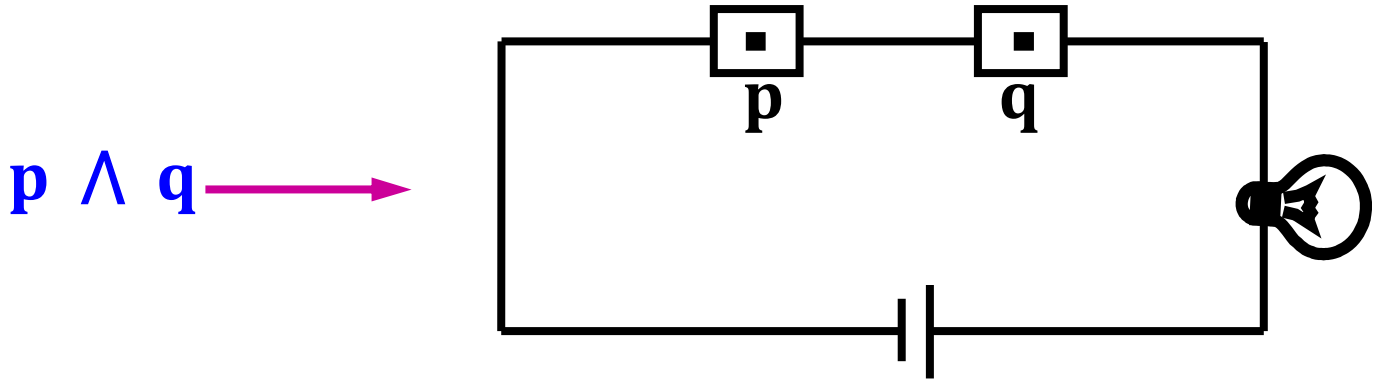
(De Morgan kuralı uygulanır. Parantezlere bakıldığında dağılma özelliği tersine çevrilir.)

Soru : **(p ∧ q) ∨ (p ∨ q ')' ≡ ?**

Devre Şeması Gösterimi

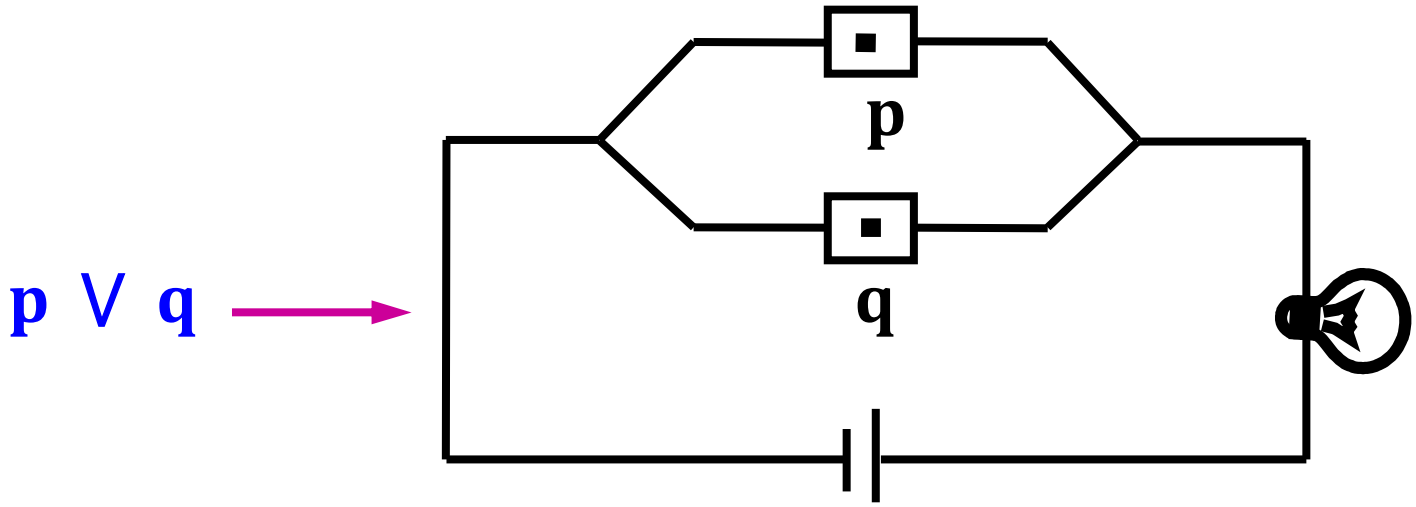
1) Seri Bağlama : **Ve (∧) bağlacı ile bağlanan bileşik önermeler elektrik devrelerinde seri bağlı (yan yana) anahtarları gösterir.**

Örnek devre aşağıdaki gibidir. Devrede iki veya daha çok anahtar bulunabilir.



2) Paralel Bağlama : **Veya (∨) bağlacı ile bağlanan bileşik önermeler elektrik devrelerinde paralel bağlı (alt alta) anahtarları gösterir.**

Örnek devre diğer saydadaki gibidir. Devrede iki veya daha çok anahtar bulunabilir.



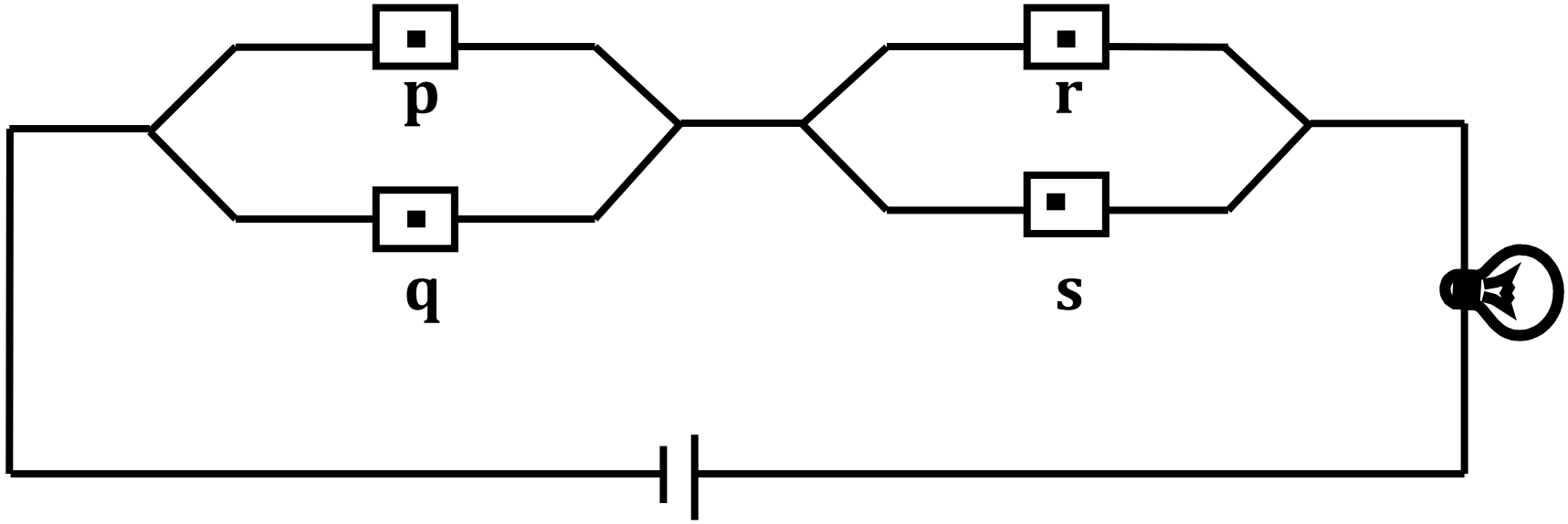
Anahtarların açık – kapalı olma durumu ve devreden akım geçme durumunu daha sonra göstereceğiz.

Örnek : **p ∧ (q ∨ r) bileşik önermesine karşılık gelen elektrik devresini çiziniz.**

Soru : **p ∨ (q ∧ r) bileşik önermesine karşılık gelen elektrik devresini çiziniz.**

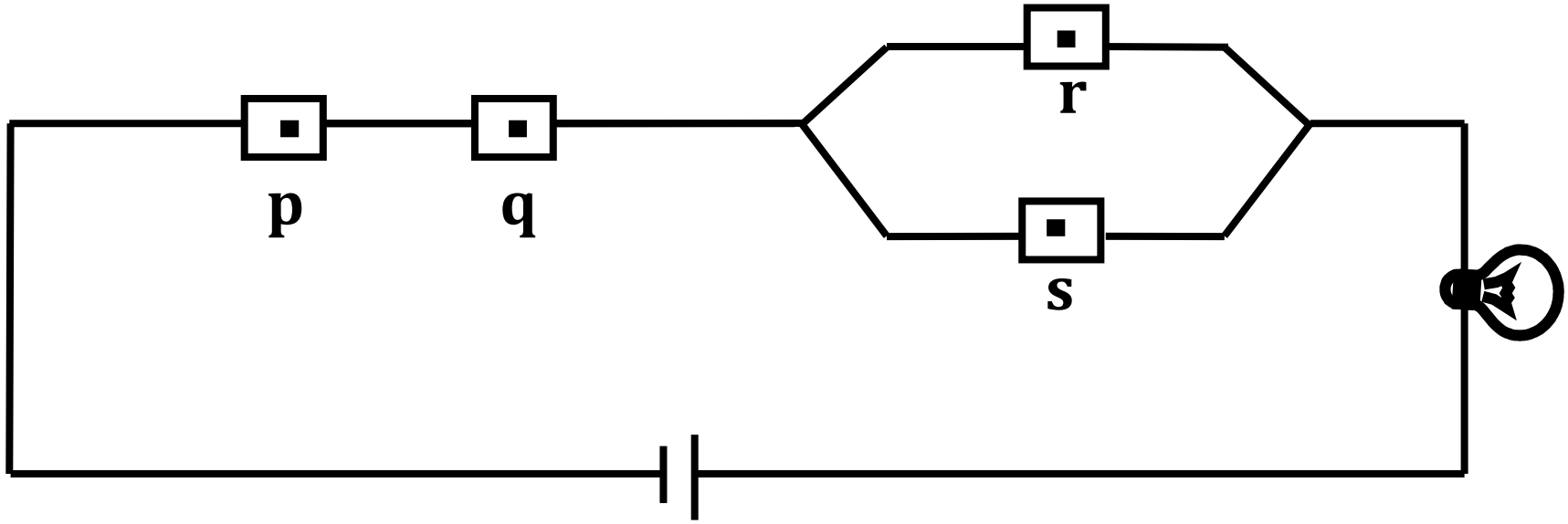
Soru : **(p ∨ q ∨ r) ∧ s bileşik önermesine karşılık gelen elektrik devresini çiziniz.**

Soru :



Elektrik devresini temsil eden bileşik önermeyi yazınız.

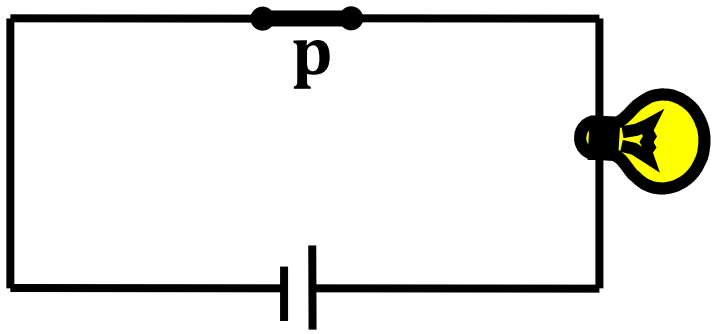
Soru :



Elektrik devresini temsil eden bileşik önermeyi yazınız.

Not :

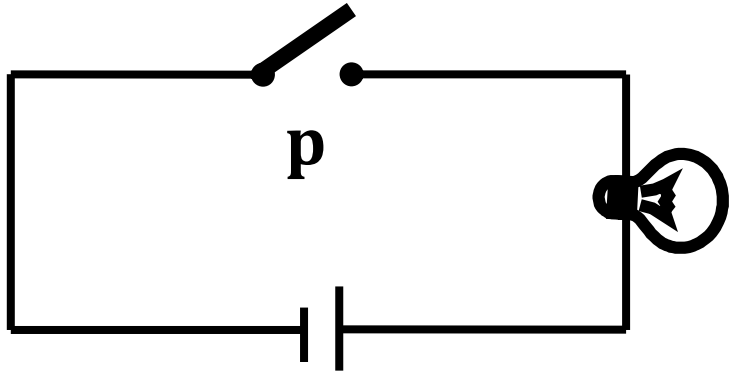
Anahtar Kapalı



Anahtar kapalı iken devreden akım geçer ve lamba yanar.

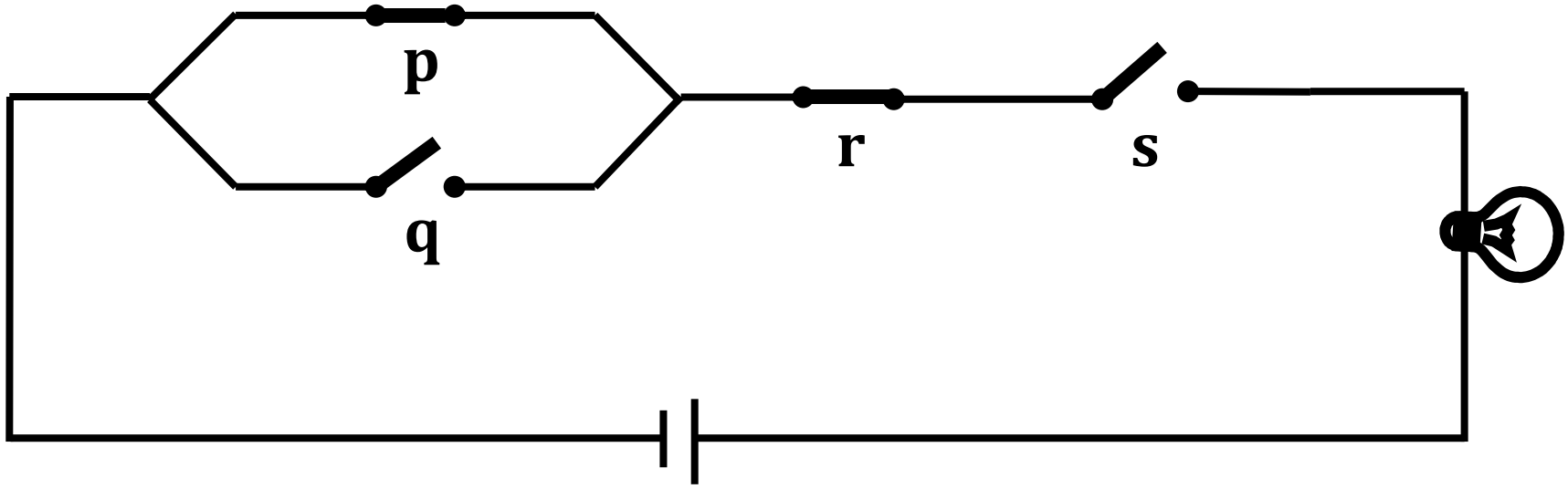
Anahtara karşılık gelen önermenin doğruluk değeri 1 'dir.

Anahtar Açık



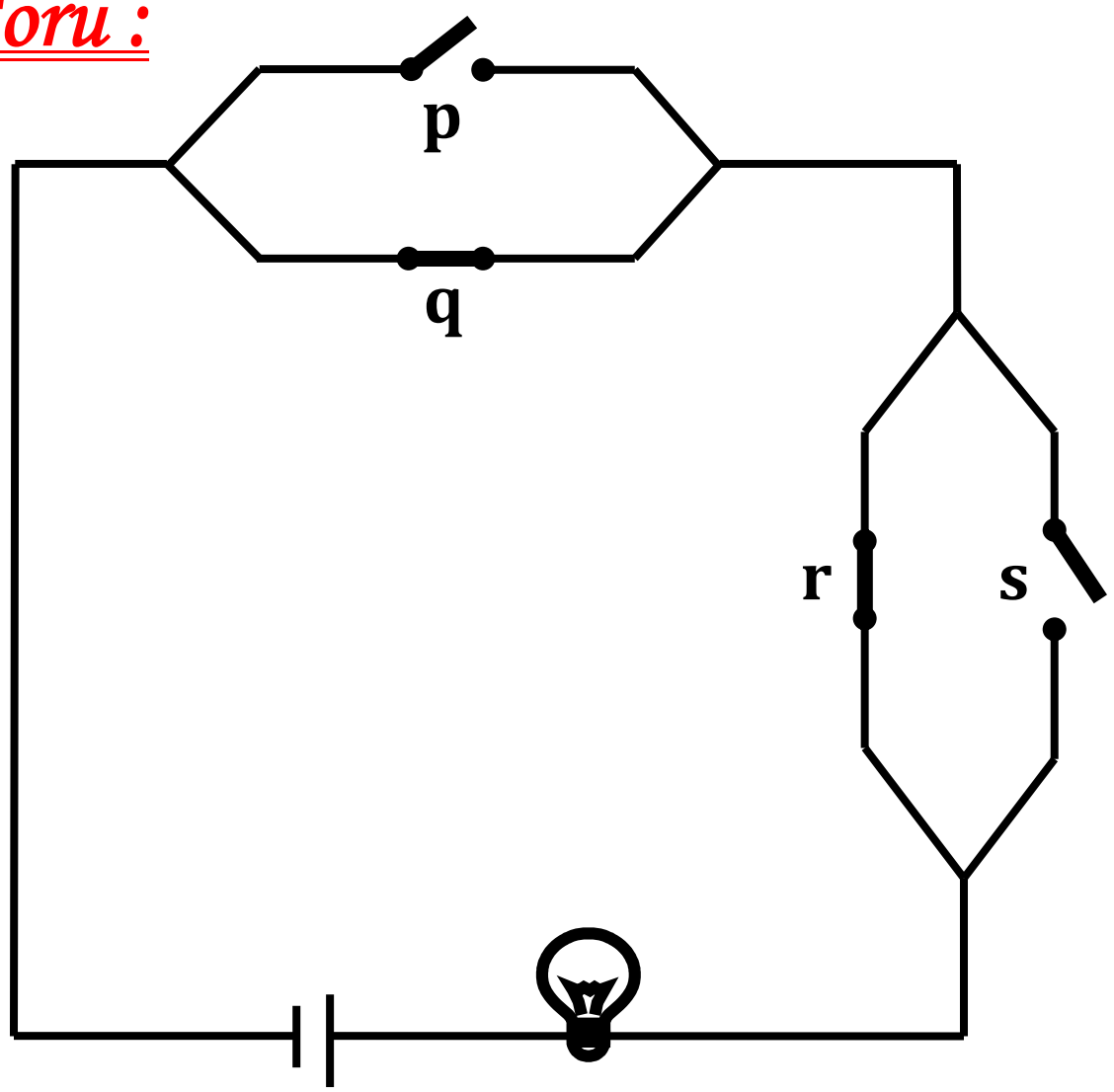
Anahtar açık iken devreden akım geçmez. Dolayısıyla lamba yanmaz. Anahtara karşılık gelen önermenin doğruluk değeri 0 'dır.

Soru :



Elektrik devresini temsil eden bileşik önermeyi yazıp, lambanın yanıp yanmayacağını söyleyiniz.

Soru :



Elektrik devresini temsil eden bileşik önermeyi yazıp, lambanın yanıp yanmayacağını söyleyiniz.

3) Ya da Bağlacı (⊻)

Yusuf karne hediyesi olarak babasından harçlık ya da bisiklet istemiştir. (İsteğinin alınması olayın gerçekleştiğini gösterir.)

Babası Yusuf 'a :

- **Harçlık vermiş ve bisikleti almıştır.** — **İsteği gerçekleşmez.**
- **Harçlık vermiş ama bisikleti almamıştır.** — **İsteği gerçekleşir.**
- **Harçlık vermemiş ama bisikleti almıştır.** — **İsteği gerçekleşir.**
- **Her ikisini de almamıştır.** — **İsteği gerçekleşmez.**

p	q	p ⊻ q
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

*** **Ya da (⊻) bağlacı ile oluşturulan bileşik önermenin doğruluk tablosu yandaki gibidir. (Ya da bağlacında sadece birinin sağlanması gerekir.)**

Soru : *A)* $(1 \veebar 0)' \veebar (0' \veebar 0) \equiv ?$

B) $[(0 \veebar 1') \wedge (1 \veebar 0)']' \equiv ?$

Soru : *A)* $p \vee q' \equiv 0$ ve $p' \veebar r \equiv 1$ ise $(p \veebar q) \wedge r' \equiv ?$

B) $p' \wedge q \equiv 1$ ve $q' \veebar r \equiv 0$ ise $(p \veebar r) \vee q \equiv ?$

Soru : **A) p ⊻ p ≡ ?** **B) p ⊻ 1 ≡ ?**

C) p ⊻ 0 ≡ ? **D) p ⊻ p' ≡ ?**

(İstenirse tablodan da işlemlerin sonucu bulunabilir.)

Not : **Ya da bağlacında da değişme ve birleşme özelliği vardır.**

Soru : **Aşağıdaki önermelerde, boş bırakılan yerlere " veya " ile " ya da " bağlaçlarından uygun olanını yerleştiriniz. Sebebini açıklayınız.**

A) **5 tek sayıdır . . . çift sayıdır.**

B) **2 asal sayıdır . . . çift sayıdır.**

C) **2^5 üslü sayıdır . . . sonucu iki basamaklıdır.**

D) **Ali, Temel Lise'de . . . Anadolu Lisesi'nde okuyacaktır.**

Kümelerdeki İşlemlerle Sembolik Mantık Kuralları Arasındaki İlişkiler

Kümelerde yapılan işlemler ile sembolik mantıkta kullanılan sembol ve gösterimler arasındaki ilişki aşağıdaki tabloda verilmiştir. Kümelerde E harfi evrensel kümeyi gösterirdi. A ve B evrensel kümenin iki alt kümesi olsun.

p ve q önermeleri sırasıyla A ve B kümeleri ile ilişkili olsun.

Kümeler	A	B	E	Ø	A '	∨	∧	=
Sembolik Mantık	p	q	1	0	p '	∪	∩	≡

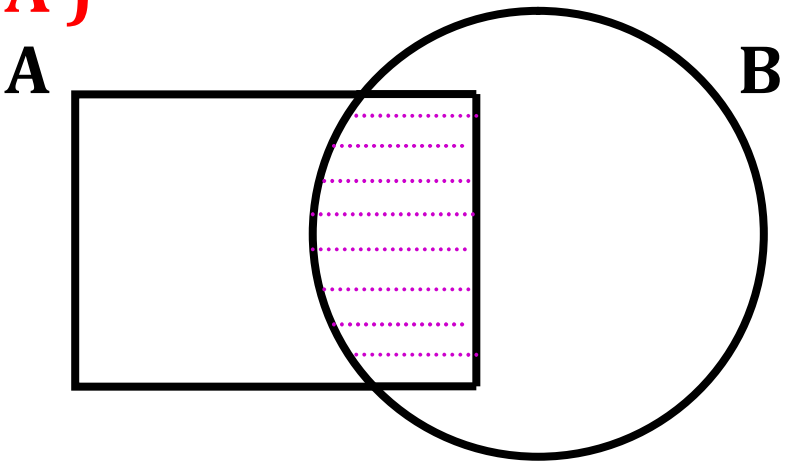
Örneğin; kümelerde E ' = Ø idi. Bu işlemin sembolik gösterimi ise 1 ' ≡ 0 olarak alınır.

Soru : **Tablonun sol kısmında eksik parçaları bulup, sağ kısmında ise verilen bileşik önermelerin küme gösterimini yazınız. (p ve q önermeleri sırasıyla A ve B kümeleri ile ilişkili olsun.)**

Sembolik Mantık	Kümeler
$p \vee 0 \equiv$	
$q \wedge q' \equiv$	
$p \wedge q \equiv q \wedge$	
$1 \vee 0 \equiv$	
$p \wedge p \equiv$	
$(1')' \equiv$	

Soru : **p ve q önermeleri sırasıyla A ve B kümeleri ile ilişkili olsun. Altta taralı kısmı gösteren kümeyi yazıp, sembolik mantıkla da yazınız.**

A)



B)

